Eine zeitreihenanalytische Untersuchung der Industrieproduktion in Deutschland

Klaus Neusser *

2. Dezember 2010

Zusammenfassung

Ziel dieses Beitrags ist es, den fortgeschrittenen Studierenden eine Einführung in die Zeitreihenanalyse zu geben. Es werden die wichtigsten theoretischen Konzepte dargestellt und anhand der Analyse der deutschen Industrieproduktion beispielhaft illustriert.

JEL Klassifikation: C22
Stichwörter: Zeitreihenanalyse, Stationarität ARMA Modelle, Prognose

*Volkswirtschaftliches Institut, Universität Bern, Schanzeneckstrasse 1, P.O. Box 8573, CH-3001 Bern, Schweiz. email: `klaus.neusser@vwi.unibe.ch`

1 Einführung

Das Ziel dieses Beitrags besteht darin, anhand eines praktischen Beispiels die grundlegenden Konzepte der Zeitreihenanalyse darzustellen. Dazu versuchen wir für den Index der deutschen Industrieproduktion ein Zeitreihenmodell zu erstellen und dieses dann anschließend für Prognosen zu verwenden. Das Verständnis der Zeitreihenanalyse setzt Kenntnisse der Statistik und Mathematik voraus. Der Aufsatz richtet sich daher an fortgeschrittene Studierende.

Unter einer Zeitreihe versteht man eine mit der Zeit $t \in \mathcal{T}$ indexierte Familie von Zufallsvariablen $\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$. In den meisten Fällen werden die Zufallsvariablen X_t zu fest vorgegebenen Zeitintervallen, z.B. jeden Monat, beobachtet, so dass wir davon ausgehen können, dass der Zeitindex t die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ durchläuft, dass also $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ gilt. Durch die Interpretation des Index als Zeit geben wir eine Richtung vor, die es uns erlaubt, zwischen Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft zu unterscheiden. Auch wollen wir aus konzeptuellen Gründen davon ausgehen, dass die Zeitreihe keinen Beginn und auch kein Ende aufweist.

Die Zeitreihe wird jedoch nur während eines Zeitfensters beobachtet, das in unserem Fall vom Januar 1965 bis zum September 2010 reicht. Um daher eine sinnvolle statistische Analyse durchführen zu können, müssen die Beobachtungen und die daraus abgeleiteten Größen für die betrachtete Zeitreihe "typisch" sein. Dies führt zum Konzept der *Stationarität*, das im nächsten Abschnitt erläutert wird. Auch sollten die Beobachtungen, alle möglichen Verläufe der Zeitreihe ausschöpfen. Man spricht in diesem Fall von einer *ergodischen* Zeitreihe. Dieses Konzept spielt für die angewandte Zeitreihenanalyse keine Rolle, so dass auf eine Erläuterung dieses Konzepts hier verzichtet wird.

Die Zeitreihenanalyse besteht zum einen aus einer deskriptiven Analyse. Hierbei geht es darum, die statistischen Eigenschaften der Zeitreihe, wie etwa Mittelwert oder Varianz, zu erfassen. Zum anderen geht es auch darum, den "inneren" Mechanismus modellhaft darzustellen. Während die statistischen Eigenschaften direkt aus den Beobachtungen geschätzt werden können, stellt die Modellbildung höhere Anforderungen.

Der vorliegende Aufsatz beschränkt sich auf die wichtigsten Konzepte und geht daher oft nicht ins Detail. Für tiefer gehende Ausführungen siehe [2] oder [1] für fortgeschrittene Leser. Im Folgenden bezeichnen $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{V}X$ den Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariablen X und $\mathbb{Z}$ die ganzen Zahlen.

2 Deskriptive Zeitreihenanalyse

Bei der deskriptiven Zeitreihenanalyse geht es darum, die Verteilung der Zufallsvariablen zu ermitteln. Da typischerweise zu jedem Zeitpunkt t nur eine Beobachtung vorliegt, können statistische Verfahren nur dann angewendet werden, wenn die Verteilung der Zufallsvariablen sowie deren Zusammenhang zeitlich invariant bleibt. Für viele Anwendungen reicht es aus, sich auf die ersten beiden Momente, also auf Mittelwert, Varianzen und Kovarianzen, zu konzentrieren. Im Falle von normal verteilten Zufallsvariablen ist dadurch bereits die gesamte Verteilung bestimmt. Um diese Konzepte präzis zu formulieren geben wir folgende Definitionen.

2.1 Definition

Definition 1. *Ist $\{X_t\}$ eine Zeitreihe, dann heißt die Funktion*

$$\gamma_X(t,s) = \operatorname{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}X_tX_s - \mathbb{E}X_t\mathbb{E}X_s, \qquad t,s \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

die Autokovarianzfunktion *von $\{X_t\}$.*

Definition 2. *Die Zeitreihe $\{X_t\}$ heißt* stationär*, falls für alle $t,s,r \in \mathbb{Z}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\mathbb{E}X_t = \mu$ *konstant*;

(ii) $\mathbb{V}X_t < \infty$;

(iii) $\gamma_X(t,s) = \gamma_X(t+r, s+r)$.

Die Autokovarianzfunktion einer stationären Zeitreihe hängt also nicht von t und s separat, sondern nur von der Differenz $t-s$ ab. Wir schreiben daher vereinfachend $\gamma_X(h)$, $h \in \mathbb{Z}$. Da außerdem $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = \operatorname{cov}(X_s, X_t)$ und somit $\gamma(h) = \gamma(-h)$ gilt, reicht es aus, die Autovarianzfunktion für nicht-negativen Zahlen zu betrachten.

Da die Werte der Kovarianz von der Skalierung der Variablen abhängen, wird in der Anwendung meist die *Autokorrelationsfunktion* (ACF), $\rho(h)$, $h = 0,1,2,\ldots$, betrachtet, die sich aus der Autokovarianzfunktionfunktion wie folgt ergibt:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \qquad h = 0,1,2,\ldots \tag{2.2}$$

da $\rho(h)$ eine Korrelation ist, gilt für alle $h = 0,1,2,\ldots$: $\rho(0) = 1$, $\rho(h) = \rho(-h)$ und $0 \le |\rho(h)| \le 1$.

Eine besondere Rolle spielen Zeitreihen, deren Autovarianzfunktion für $h \neq 0$ null ist. Sie dienen als Bausteine für komplexere Zeitreihen (siehe Abschnitt 3).

Definition 3. $\{Z_t\}$ *heißt* Weißes Rauschen *("white noise"), falls* $\{Z_t\}$ *stationär ist und gilt:*

- $\mathbb{E}Z_t = 0$
- $\gamma_Z(h) = \begin{cases} \sigma^2 & h = 0; \\ 0 & h \neq 0. \end{cases}$

Dieser Sachverhalt wird mit $Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ *bezeichnet.*

2.2 Schätzung

Bei der Schätzung der Autokovarianzfunktion bzw. der Autokorrelationsfunktion werden die theoretischen Momente durch die entsprechenden empirischen Momente ersetzt:

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}(h) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} \left(X_t - \overline{X}_T\right) \left(X_{t+h} - \overline{X}_T\right) \\ \widehat{\rho}(h) &= \frac{\widehat{\gamma}(h)}{\widehat{\gamma}(0)}, \end{aligned}$$

wobei T die Anzahl Beobachtungen, "ˆ" den Schätzer bzw. Schätzwert und "¯" das arithmetische Mittel bezeichnen. Unter relativ allgemeinen Voraussetzungen kann gezeigt werden, dass diese Schätzer konsistent und asymptotisch normal verteilt sind. Unter der Hypothese $X_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ gilt insbesondere:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\rho}(1) \\ \vdots \\ \widehat{\rho}(h) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{W}{T} \right)$$

wobei $W = (w_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,h\}}$ mit

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies bedeutet, dass unter der Hypothese $X_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ durch $\pm 1.96/T$ ein 95-Prozent Konfidenzintervall für $\hat{\rho}(h)$, $h = 1, 2, \ldots$, gegeben ist. Aufbauend auf diesem Ergebnis kann ein Test der verbundene Nullhypothese, dass alle Korrelationen $\rho(1)$ bis $\rho(N)$ gleichzeitig null, konstruiert werden. Die entsprechende Ljung-Box-Teststatistik LB ist χ^2 verteilt mit N Freiheitsgraden:

$$LB = T(T+2) \sum_{h=1}^{N} \frac{\hat{\rho}^2(h)}{T-h} \sim \chi^2_N. \tag{2.3}$$

Dieser Test wird auch als Portemanteau-Test bezeichnet. Dabei sollte N relativ gross gewählt werden.

3 Modelle der Zeitreihenanalyse

Während die Autokovarianzfunktion die äußeren, beobachtbaren Eigenschaften der Zeitreihe erfasst, sollen die Modelle den inneren Mechanismus darstellen. Wie bereits vorher angeführt, besteht eine Idee der Zeitreihenanalyse darin, aus einfachen Bausteinen, wie dem Weißen Rauschen, komplexere Zeitreihen zu erstellen. Dieses Prinzip führt zur Klasse der ARMA-Modelle. Diese Modell-Klasse erlaubt es, alle stationären Zeitreihen beliebig genau zu approximieren. Das erklärt, warum diese Modelle in der Praxis bei weitem am meisten verwendet werden.

Definition 4. *Sei $\{X_t\}$ mit $t \in \mathbb{Z}$ eine Zeitreihe, dann heißt $\{X_t\}$ ein* autoregressiver "Moving-average"-Prozess *der Ordnung (p,q), abgekürzt ARMA(p,q)-Prozess, falls er stationär ist und die stochastische Differenzengleichung*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \ldots + \theta_q Z_{t-q}$$

mit $Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ und $\phi_p \theta_q \neq 0$ erfüllt. $\{X_t\}$ heißt ein ARMA(p,q)-Prozess mit Mittelwert μ, falls $\{X_t - \mu\}$ ein ARMA(p,q)-Prozess ist.

In der Ökonomie wird $\{Z_t\}$ oft als *Schock* (z.B. als Angebots- oder Nachfrageschock) interpretiert.

Wenn $q = 0$ ist, haben wir es mit einem autoregressiven Modell, AR(p)-Modell, zu tun. In diesem Fall hängt X_t nur von seinen vergangenen Werten und von Z_t ab:

$$\mathrm{AR}(p): \qquad X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + Z_t.$$

Wenn $p = 0$ ist, haben wir es mit einem "moving average" Modell, MA(q)-Modell, zu tun, wobei sich X_t als gleitender Durchschnitt des laufenden und der vergangenen Werte von Z_t ergibt:

$$\mathrm{MA}(q): \qquad X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \ldots + \theta_q X_{t-q}.$$

Wenn wir X_t als den laufenden Zustand und $\{Z_t\}$ als Ursache oder Impuls interpretieren, so stellt sich die Frage, ob X_t als gewichtete Summe laufender und vergangener Impulse verstanden werden kann. Falls dies der Fall ist, so ist $\{X_t\}$ kausal bezüglich $\{Z_t\}$, da die Ursache zeitlich vor der Wirkung kommt. Formal gesehen gilt folgende Definition.

Definition 5. *Ein ARMA(p,q)-Prozess* $\{X_t\}$ *heißt* kausal *bezüglich* $\{Z_t\}$, *falls eine Folge* $\{\psi_j\}$ *mit der Eigenschaft* $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ *existiert, so dass*

$$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \quad \textit{mit } \psi_0 = 1. \tag{3.1}$$

Es ist wichtig festzuhalten, dass die Kausalität von $\{X_t\}$ keine absolute Eigenschaft ist, sondern immer nur relativ zu einem anderen Prozess definiert werden kann. Die Folge der Koeffizienten $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ heißt die *Impulsantwortfunktion.* Sie gibt die Wirkung eines Schocks zum Zeitpunkt t auf X_{t+j}, $j = 0, 1, 2, \ldots$, an.

Ob eine kausale Darstellung (3.1) existiert, hängt von den Nullstellen des Polynoms $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$ ab.[1] Wir haben das folgende Theorem:

Theorem 1. *Sei* $\{X_t\}$ *ein ARMA(p,q)-Prozess, wobei die Polynome* $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$ *und* $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q$ *keine gemeinsame Nullstelle haben.* $\{X_t\}$ *ist dann und nur dann kausal bezüglich* $\{Z_t\}$, *wenn*

$$\Phi(z) \neq 0 \quad \textit{für } |z| \leq 1$$

bzw. wenn die Nullstellen oder Wurzeln der Gleichung $\Phi(z) = 0$ *außerhalb des Einheitskreises liegen. Die Koeffizienten* $\{\psi_j\}$ *sind dabei durch folgende Beziehung eindeutig bestimmt:*

$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}.$$

Im Fall des AR(1) Modells, $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, $Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$, bedeutet dies, dass $\{X_t\}$ dann und nur dann kausal bezüglich $\{Z_t\}$ ist, wenn $|\phi| < 1$. Im Fall $|\phi| > 1$ gibt es zwar eine stationäre Lösung, diese ist aber nicht kausal. Falls $|\phi| = 1$ ist, gibt es keine stationäre Lösung. Der Fall $\phi = 1$ ist für die Ökonomie, insbesondere die Finanzmarktökonomie, besonders relevant, da es das bevorzugte Modell für Aktienkurse und andere Finanzmarktvariablen ist. $\{X_t\}$ folgt dann einem "random walk" oder Irrfahrt. Irrfahrten sind aber auch in vielen anderen ökonomischen Variablen, wie etwa auch dem Bruttoinlandsprodukt, "versteckt". Sie können durch so genannte Tests auf Einheitswurzel, d.h. Tests der Nullhypothese $\Phi(1) = 0$, "entdeckt" werden. Für Details siehe [2, Kapitel 7].

[1] Dabei bezeichnet z eine möglicherweise komplexe Zahl.

4 Die Daten

Wir kommen nun zur praktischen Umsetzung der besprochenen Konzepte. Untersucht wird der Index der Industrieproduktion.[2] Die Reihe liegt zu konstanten Preisen vor und ist kalender- und saisonbereinigt.

Es empfiehlt sich, in einem ersten Schritt immer die Daten zu plotten. Dies gibt bereits einen ersten Einblick in die Eigenschaften der Zeitreihe. Die Abbildung 1(a) zeigt den Verlauf der Industrieproduktion vom Januar 1965 bis zum September 2010.

Da die Zeitreihe einen offensichtlichen Trend aufweist, ist sie nicht stationär, da zumindest der Mittelwert nicht konstant über die Zeit ist.[3] Es empfiehlt sich daher nicht die Originalreihe, sondern die differenzierte Reihe $\Delta IP = IP_t - IP_{t-1}$ zu betrachten. Diese ist in Abbildung 1(b) dargestellt. Der Trend ist offensichtlich verschwunden und wir gehen daher im Folgenden davon aus, dass die so gewonnene Zeitreihe stationär ist.

Nach dieser ersten Betrachtung wenden wir uns der Autokorrelationsfunktion zu, deren Schätzung in Abbildung 2(a) zu sehen ist. Die ersten drei Werte fallen außerhalb des 95-Prozent Konfidenzintervalls und müssen daher als statistisch signifikant bezeichnet werden. Die restlichen Werte liegen alle innerhalb des Konfidenzintervalls und sind daher statistisch nicht signifikant. Eine solche Konstellation wäre typisch für ein ARMA(0,3) Modell. Um weitere Aufschlüsse zu erhalten, betrachten wir nun die *partielle Autokorrelationsfunktion* (PACF). Diese misst die Korrelation zwischen zwei Zeitpunkten unter Ausschaltung der dazwischen liegenden Korrelationen. Sie ist in Abbildung 2(b) dargestellt. Ähnlich wie bei der ACF sind bei der PACF lediglich die erste und die dritte Korrelation signifikant. Dieses Muster wäre typisch für ein ARMA(3,0) Modell. Somit legt die Analyse der Korrelationsfunktionen kein eindeutiges Modell nahe. In so einem Fall empfiehlt es sich, mehrere Modelle gleichzeitig zu betrachten und diese weiteren Analysen zuzuführen.

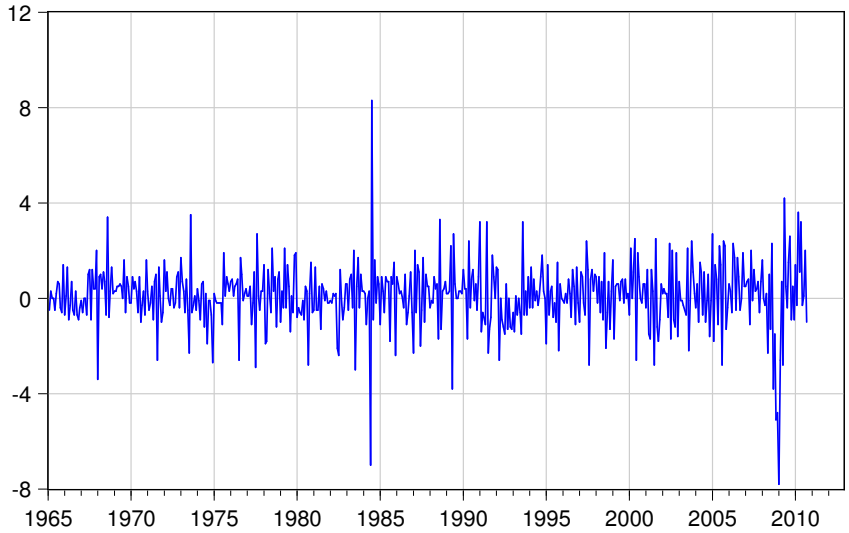
5 Das Modell

Die Analyse untersucht die folgenden Modelle: ARMA(1,0), ARMA(1,2), ARMA(1,3) und ARMA(5,6), wobei ersteres als sehr kleines und letzteres

[2] Genau genommen handelt es sich um einen Index der Produktion im Produzierenden Gewerbe (Bergbau und Verarbeitendes Gewerbe) mit der internen Bezeichnung BBDE1.M.DE.Y.BAA1.A2P200000.G.C.I05.L. Die Reihe wurde von der Homepage der Deutschen Bundesbank am 9. November 2010 heruntergeladen und ist unter `http://www.neusser.ch/book.html` verfügbar.

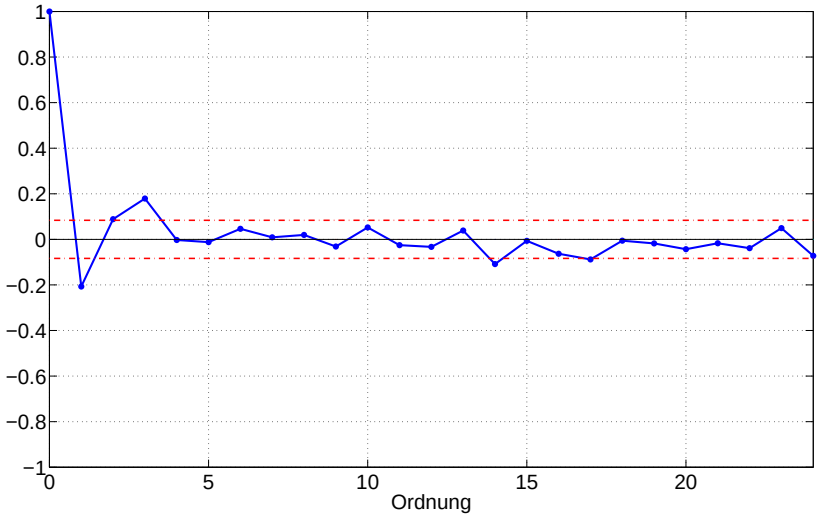
[3] Ein formaler Test dieser Behauptung kann aus Platzgründen nicht präsentiert werden.

(a) Originaldaten

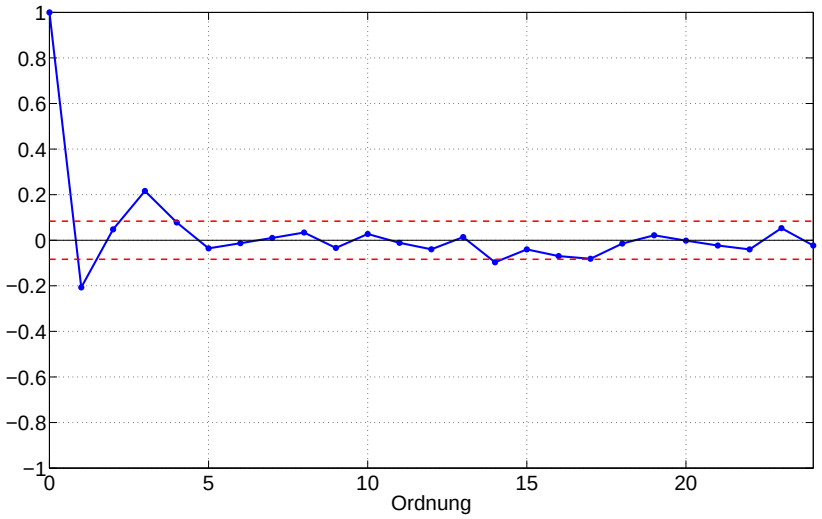


(b) Differenzierte Daten

Abbildung 1: Industrieproduktion zu konstanten Preisen (kalender- und saisonbereinigt)



(a) ACF



(b) PACF

Abbildung 2: Autokorrelationsfunktion (ACF) und partielle Autokorrelationsfunktion (PACF)

als sehr grosses Modell betrachtet werden kann. Alle Modelle wurden mittels der Maximum-Likelihood-Methode für den Zeitraum Januar 1965 bis Dezember 2009 geschätzt.[4]

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 angeführt. Da der Schätzer asymptotisch normal verteilt ist, können Hypothesen über die Koeffizienten mittels des üblichen t- bzw. F-Test durchgeführt werden. Die Nullhypothese, dass ein Koeffizient null ist, kann somit leicht gegen die Alternative, dass er ungleich null ist, durch die t-Statistik getestet werden. Der entsprechende t-Wert ergibt sich als Quotient zwischen Schätzwert und geschätzter Standardabweichung, die in Tabelle 1 unter dem jeweiligen Koeffizienten in Klammer angeführt ist. Dabei zeigt sich, dass bei den kleineren Modellen, ARMA(1,0), ARMA(1,2) und ARMA(3,1), alle Koeffizienten bei einem Signifikanzniveau von 5-Prozent signifikant von null verschieden sind.[5] Beim großen ARMA(5,6) Modell sind lediglich die Koeffizienten ϕ_3 und θ_3 nicht signifikant.

Darin sind neben den geschätzten Koeffizienten in der Zeile AIC und HQ die Werte des Akaike- bzw. des Hannan-Quinn-Informationskriteriums angeführt. Informationskriterien bestehen üblicherweise aus zwei Teilen:

$$\mathrm{IC} = \ln \hat{\sigma}^2_{p,q} + (p+q)\frac{C(T)}{T}.$$

Dabei bezeichnet $\hat{\sigma}^2_{p,q}$ die geschätzte Varianz von $\{Z_t\}$, so dass $\ln \hat{\sigma}^2_{p,q}$ die Güte der Anpassung des Modells an die Daten misst. Der Wert wird umso kleiner je höher die Ordnungen p und q sind. Da jedoch zu große Modelle zu zufällig signifikanten Koeffizienten führt ("overfitting"), werden große Modelle durch den zweiten Term "bestraft". Dabei fällt die Strafe $C(T)$ umso größer aus je höher die Ordnung des Modells ist und je geringer die Anzahl der Beobachtungen T ist. Ziel es nun den Wert des Informationskriteriums durch geeignete Wahl von p und q zu minimieren. Das Akaike-Kriterium setzt $C(T) = 2$ und überschätzt tendenziell die Ordnung des Modells. Das Hannan-Quinn-Krieterium wählt $C(T) = 2 \ln \ln T$, was im Durchschnitt zur korrekten Wahl der Ordnung führt. Es birgt allerdings den Nachteil, dass zu kleine Modelle gewählt werden und man sich damit das Risiko eines "omitted variable bias" einhandelt.

Die beiden Kriterien wählen unterschiedliche Modelle aus. Während das AIC-Kriterium das ARMA(5,6) Modell bevorzugt, schlägt das HQ-Kriterium das ARMA(1,2) vor. Es ist daher notwendig, weitere Abklärungen der verschiedenen Modelle vorzunehmen. Da die Koeffizienten wenig aussagekräftig sind, empfiehlt es sich, die Nullstellen der Polynome $\Phi(z)$ und $\Theta(z)$ zu betrachten. Ihre Kehrwerte sind in Abbildung 3 dargestellt. Vergleichen wir

[4] Alle Berechnungen wurden mit dem Programmpaket EVIEWS Version 7 durchgeführt.

[5] Nullhypothese wird abgelehnt, wenn der t-Wert absolut gesehen größer als 1.96 ist.

Tabelle 1: Schätzergebnisse einiger ARMA Modelle für ΔIP (Schätzzeitraum: Januar 1965 bis Dezember 2008)

	ARMA(1,0)	ARMA(1,2)	ARMA(3,1)	ARMA(5,6)
ϕ_1	-0.301	0.841	0.344	-0.810
	(0.042)	(0.078)	(0.121)	(0.080)
ϕ_2			0.190	-0.479
			(0.055)	(0.134)
ϕ_3			0.219	0.017
			(0.047)	(0.153)
ϕ_4				0.424
				(0.129)
ϕ_5				0.760
				(0.076)
θ_1		-1.195	-0.681	0.479
		(0.081)	(0.121)	(0.083)
θ_2		0.404		0.294
		(0.044)		(0.118)
θ_3				0.042
				(0.130)
θ_4				-0.243
				(0.113)
θ_5				-0.495
				(0.074)
θ_6				0.395
				(0.047)
$\hat{\sigma}$	1.227	1.205	1.204	1.194
AIC	3.252	3.219	3.219	3.214
HQ	3.258	3.231	3.235	3.253
LB(20)	38.029*	18.099	12.704	8.806
RMSE	7.638	7.186	6.823	7.216

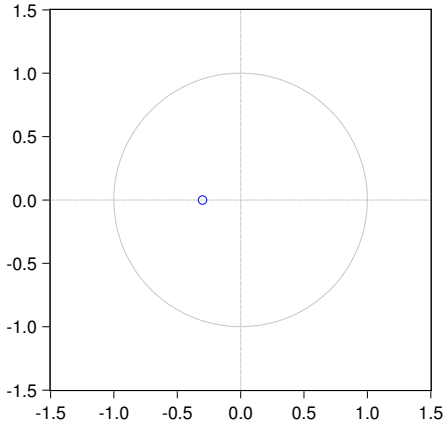
Gleichungen enthalten noch eine Konstante
geschätzte Standardabweichungen in Klammer
AIC ... Akaike-Informationskriterium
HQ ... Hannan-Quinn-Informationskriterium
RMSE ... Wurzel des durchschnittlichen quadrierten Prognosefehlers ("root mean squared error")
LB(20) ... Ljung-Box-Statistik der Ordnung 20; * bedeutet signifikant zum 5-Prozentniveau

die Nullstellen des ARMA(1,2) Modells (Abbildung 3(b)) mit jenen des ARMA(5,6) Modells (Abbildung 3(d)). Dabei zeigt sich, dass beim ARMA(5,6) Modell vier Nullstellen fast deckungsgleich am Einheitskreis (Kreis mit Radius eins in der komplexen Zahlenebene) liegen. Dies ist typisch für ein überparametrisiertes Modell: Die Nullstellen des AR-Polynoms $\Phi(z)$ sind fast identisch mit jenen des MA-Polynoms $\Theta(z)$ und liegen fast am Einheitskreis. Man kann daher die Ordnung von p und q um diese vier Nullstellen kürzen und erhält das ARMA(1,2) Modell. Man beachte, dass die restlichen Nullstellen von dieser Reduktion des Modells kaum betroffen sind. Ausserdem zeigt dieses Beispiel, dass es nicht genügt, auf die Signifikanz der Koeffizienten zu achten. Bis auf ϕ_3 und θ_3 sind alle Koeffizienten des ARMA(5,6) Modells gemäss dem üblichen t-Test statistisch signifikant verschieden von null. Die Analyse der Nullstellen schließt daher das ARMA(5,6) Modell aus.

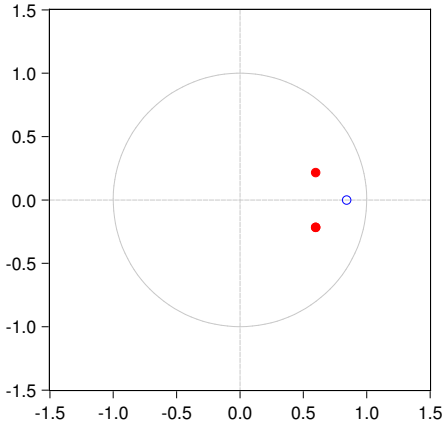
Die Ljung-Box-Statistik (2.3) stellt ein wichtiges Diagnoseinstrument dar, um verbleibende Korrelation in den Residuen zu entdecken. Da es sich bei den Zeitreihen um Residuen handelt, müssen die Freiheitsgrade angepasst werden. Anstatt N sind, sind sie gleich $N - (p + q)$. Die entsprechenden Werte der Teststatistik sind in Tabelle 1 angeführt. Dabei zeigt sich, dass nur das ARMA(1,0) Modell noch signifikante Korrelationen in den Residuen aufweist und somit die Daten nicht genügend erfasst. Dieses Modell muss also als zu klein eingestuft werden.

6 Die Prognose

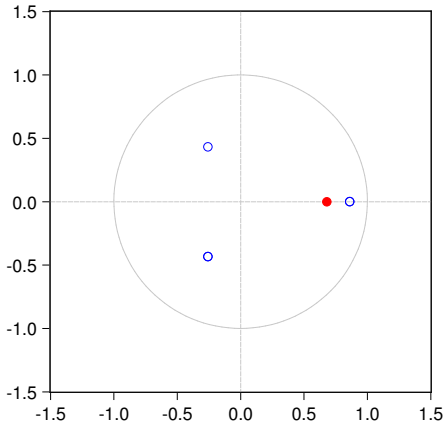
Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Zeitreihenanalyse ist die Prognose. Da die Modelle für den Zeitraum 1965 bis 2009 geschätzt worden sind, können die restlichen Beobachtungen von Januar 2009 bis September 2010 dazu verwendet werden, die Prognosegüte der Modelle zu vergleichen. Dabei werden nur lineare Prognosefunktionen, die gemäss dem Kleinst-Quadrate-Kriterium hergeleitet wurden, betrachtet. Die prognostizierten Verläufe der Industrieproduktion sowie deren tatsächlicher Verlauf sind in Abbildung 4 dargestellt. Dabei zeigt sich, dass alle Modelle den weiteren Abschwung zu Beginn des Jahres 2009 nicht vorhersagen können. Am augenscheinlichsten ist die Fehleinschätzung beim AR(1), das komplett daneben liegt. Dies ist auch wegen der schlechten Anpassung an die Daten nicht verwunderlich. Die anderen Modelle zeigen zwar einen weiteren Rückgang an, der allerdings wesentlich schwächer als in den Daten ausfällt. Dies zeigt exemplarisch, dass rein statistische Verfahren wie die Zeitreihenanalyse sich schwer tun, Wendepunkte, insbesondere der Konjunktur, vorherzusagen. Dies trifft namentlich für die Finanzmarktkrise zu.



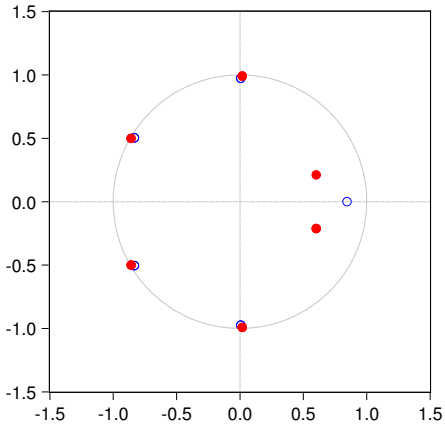
(a) ARMA(1,0)



(b) ARMA(1,2)



(c) ARMA(3,1)



(d) ARMA(5,6)

Abbildung 3: Kehrwerte der Nullstellen von $\Phi(z)$ (blaue Kreise) und $\Theta(z)$ (rote Punkte) für verschiedener Modelle

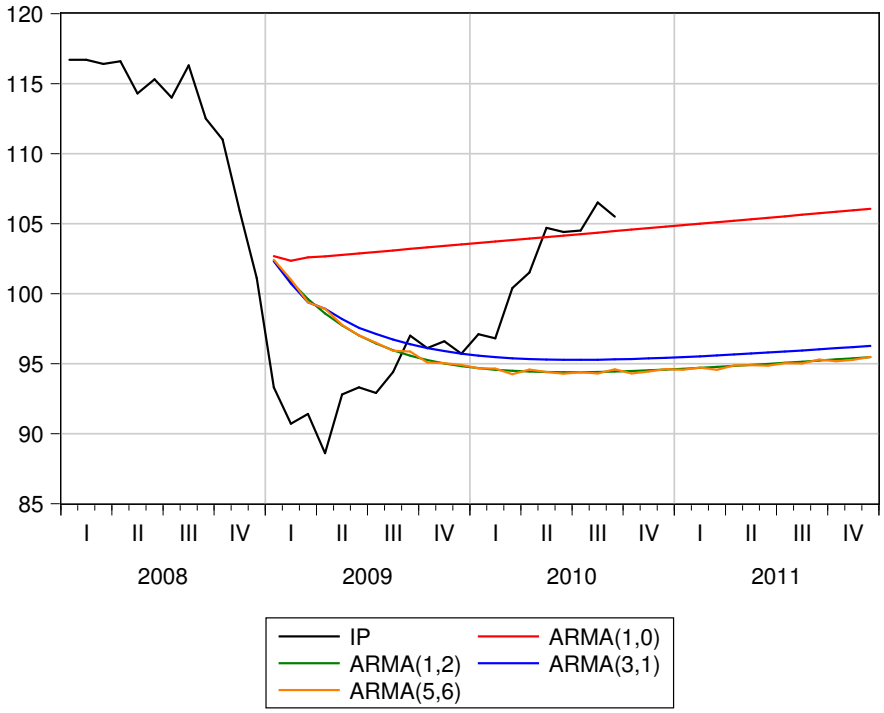


Abbildung 4: Prognosevergleich der Modelle für den Zeitraum Januar 2009 bis September 2010

Weiter fällt auf, dass zwar alle Modelle, bis auf das AR(1) Modell, ähnliche Prognosen liefern, dass aber das ARMA(3,1) relativ am besten abschneidet. Es sagt eine etwas schnellere Erholung voraus. Beachtenswert ist auch die fast identische Vorhersage des ARMA(1,2) und des ARMA(5,6) Modells. Interessanterweise würde die strikte Anwendung der Informationskriterien das ARMA(1,2) Modell dem ARMA(3,1) vorgezogen werden. Dies zeigt, dass bei der Modellauswahl durchaus widersprüchliche Ergebnisse erzielt werden können und dass es in der Praxis ratsam ist, verschiedene Modelle nebeneinander zu betrachten und sich nicht im vorhinein auf ein Modell festzulegen.

7 Schlussfolgerungen

Der vorliegende Beitrag versucht, einen ersten Einblick in die Zeitreihenanalyse zu geben und die vorgestellten Konzepte anhand des Beispiels der deutschen Industrieproduktion zu illustrieren. Dabei mussten notwendigerweise einige, auch für die Praxis, wichtige Aspekte vernachlässigt werden. So wurde das Problem der adäquaten Modellierung des Trends nicht aufgegriffen. Außerdem wurden Fragen im Zusammenhang mit der Schätzung der Modelle nicht näher erläutert. Auch ist es möglich, die Prognosegüte der Modelle u.a. durch die Berücksichtigung von Strukturbrüchen, dem Adjustieren der Konstanten ("intercept or constant adjustment ") oder durch die Verwendung von Mehrschrittprädiktoren zu verbessern.

Weitere Gebiete der Zeitreihenanalyse sind die multivariate Zeitreihenanalyse, also die Erweiterung von einer auf mehrere Variablen, sowie die Modellierung nicht-stationärer Zeitreihen (integrierte bzw. kointegrierte Zeitreihen). Daneben ist die Zeitreihenanalyse für die Modellierung von Finanzmarktdaten von eminenter Bedeutung. Diese Zeitreihen sind durch eine systematisch schwankende bedingte Varianz charakterisiert. Robert F. Engle und Clive W. Granger wurden für ihre Arbeiten in diesen Gebieten 2003 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

Literatur

[1] Brockwell, Peter J., and Richard A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] Klaus Neusser. *Zeitreihenanalyse in the Wirtschaftswissenschaften*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.